

УДК 517.983.53

**О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА
ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ**

А.Л. ЭЛЬБАБЛИ

Бакинский Государственный Университет

ahmed_elbably2004@yahoo.com

В статье изучены вопросы разрешимости для одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка с кратной характеристикой на всей оси. В пространстве типа Соболева $W_2^3(R; H)$ определены условия, обеспечивающие корректную и однозначную разрешимость исследуемого уравнения, которые выражены лишь его операторными коэффициентами.

Ключевые слова: *операторно-дифференциальное уравнение, кратная характеристика, самосопряженный оператор, гильбертово пространство, регулярная разрешимость*

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H полиномиальный операторный пучок

$$P(\lambda) = (-\lambda E + A)(\lambda E + A)^2 + \lambda^2 A_1 + \lambda A_2 + A_3, \quad (1)$$

где E - единичный оператор, A - самосопряженный положительно-определенный оператор, а A_1, A_2, A_3 - линейные, вообще говоря, неограниченные операторы. С этим полиномиальным пучком свяжем уравнение

$$P(d/dt)u(t) = f(t) \quad (2)$$

в пространстве $L_2(R; H)$, причем под $L_2(R; H)$ (см. [1]) понимаем гильбертово пространство всех вектор-функций, определенных в $R = (-\infty, +\infty)$ со значениями в H , которые имеют конечную норму

$$\|f\|_{L_2(R; H)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2}.$$

Теперь же введем следующее множество:

$$W_2^3(R; H) = \left\{ u(t) : \frac{d^3 u(t)}{dt^3} \in L_2(R; H), A^3 u(t) \in L_2(R; H) \right\}.$$

Это множество, снабженное нормой

$$\|u\|_{W_2^3(R;H)} = \left(\left\| \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(R;H)}^2 + \|A^3 u\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{1/2},$$

становится гильбертовым пространством [2].

Определение 1. Если при $f(t) \in L_2(R;H)$ существует вектор-функция $u(t) \in W_2^3(R;H)$, удовлетворяющая уравнению (2) почти всюду, то ее будем называть *регулярным решением* уравнения (2).

Определение 2. Если при любом $f(t) \in L_2(R;H)$ существует регулярное решение $u(t)$ уравнения (2), причем имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^3(R;H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R;H)},$$

то уравнение (2) будем называть *регулярно разрешимым*.

В данной работе получены условия регулярной разрешимости уравнения (2). Эти условия выражены через операторные коэффициенты полиномиального пучка (1). Отметим, что вопросы разрешимости на бесконечных интервалах детально изучены для операторно-дифференциальных уравнений высокого четного порядка. Среди этих работ можно выделить статьи М.Г.Гасымова, А.Г.Костюченко и М.Б.Оразова, М.Л.Горбачука, А.А.Шкаликова, С.С.Мирзоева и др. В частности, для уравнений четвертого порядка следует отметить, например, работы [3], [4]. В работе [3] изучены и операторно-дифференциальные уравнения третьего порядка. Но в нашем случае главная часть уравнения имеет кратную характеристику. Этот фактор является принципиальной разницей от ранее исследованных операторно-дифференциальных уравнений нечетного порядка. Регулярная разрешимость на всей оси для операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка с кратной характеристикой изучена в работах [5]-[7].

Введем следующие обозначения. Обозначим через P_0 и P_1 операторы, действующие из пространства $W_2^3(R;H)$ в $L_2(R;H)$, следующим образом:

$$P_0 u(t) \equiv \left(-\frac{d}{dt} + A \right) \left(\frac{d}{dt} + A \right)^2 u(t), \quad u(t) \in W_2^3(R;H);$$

$$P_1 u(t) \equiv A_1 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + A_2 \frac{du(t)}{dt} + A_3 u(t), \quad u(t) \in W_2^3(R;H).$$

Теорема 1. Оператор P_0 изоморфно отображает пространство $W_2^3(R;H)$ на $L_2(R;H)$.

Доказательство. Принимая во внимание теорему о промежуточ-

ных производных [2], легко доказывается, что оператор P_0 ограниченно действует из $W_2^3(R; H)$ в $L_2(R; H)$. Далее же, используя преобразование Фурье, из уравнения $P_0 u(t) = f(t)$, $f(t) \in L_2(R; H)$, $u(t) \in W_2^3(R; H)$, получаем

$$(-i\xi E + A)(i\xi E + A)^2 \tilde{u}(\xi) = \tilde{f}(\xi),$$

где $\tilde{u}(\xi)$, $\tilde{f}(\xi)$ - преобразования Фурье функций $u(t)$, $f(t)$, соответственно. Как ясно становится, операторный пучок $(-i\xi E + A)(i\xi E + A)^2$ обратим и, поэтому,

$$\tilde{u}(\xi) = (i\xi E + A)^{-2} (-i\xi E + A)^{-1} \tilde{f}(\xi). \quad (3)$$

Таким образом,

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\xi E + A)^{-2} (-i\xi E + A)^{-1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\xi s} ds \right) e^{i\xi t} d\xi, \quad t \in R.$$

Теперь покажем, что $u(t) \in W_2^3(R; H)$. Если использовать равенство Парсевеля и учесть (3), то получаем

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^3(R; H)}^2 &= \left\| \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(R; H)}^2 + \|A^3 u\|_{L_2(R; H)}^2 = \left\| -i\xi^3 \tilde{u}(\xi) \right\|_{L_2(R; H)}^2 + \|A^3 \tilde{u}(\xi)\|_{L_2(R; H)}^2 = \\ &= \left\| -i\xi^3 (i\xi E + A)^{-2} (-i\xi E + A)^{-1} \tilde{f}(\xi) \right\|_{L_2(R; H)}^2 + \|A^3 (i\xi E + A)^{-2} (-i\xi E + A)^{-1} \tilde{f}(\xi)\|_{L_2(R; H)}^2 \leq \\ &\leq \sup_{\xi \in R} \left\| -i\xi^3 (i\xi E + A)^{-2} (-i\xi E + A)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H}^2 \|\tilde{f}(\xi)\|_{L_2(R; H)}^2 + \\ &+ \sup_{\xi \in R} \|A^3 (i\xi E + A)^{-2} (-i\xi E + A)^{-1}\|_{H \rightarrow H}^2 \|\tilde{f}(\xi)\|_{L_2(R; H)}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее, из спектрального разложения оператора A (под обозначением $\sigma(A)$ будем понимать спектр оператора A) при $\xi \in R$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| -i\xi^3 (i\xi E + A)^{-2} (-i\xi E + A)^{-1} \right\| &= \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left| -i\xi^3 (i\xi + \mu)^{-2} (-i\xi + \mu)^{-1} \right| \leq \\ &\leq \sup_{\mu \in \sigma(A)} \frac{|\xi|^3}{(\xi^2 + \mu^2)^{3/2}} \leq 1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \|A^3 (i\xi E + A)^{-2} (-i\xi E + A)^{-1}\| &= \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left| \mu^3 (i\xi + \mu)^{-2} (-i\xi + \mu)^{-1} \right| \leq \\ &\leq \sup_{\mu \in \sigma(A)} \frac{\mu^3}{(\xi^2 + \mu^2)^{3/2}} \leq 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Если же учесть (5) и (6) в (4), то получим

$$\|u\|_{W_2^3(R;H)}^2 \leq 2\|\tilde{f}(\xi)\|_{L_2(R;H)}^2 = 2\|f\|_{L_2(R;H)}^2.$$

Следовательно, $u(t) \in W_2^3(R;H)$. Завершаем доказательство теоремы, приняв во внимание теорему Банаха об обратном операторе.

Теорема 2. Пусть операторы $A_j A^{-j}$, $j = 1, 2, 3$, ограничены в H .

Тогда оператор P_1 ограниченно действует из пространства $W_2^3(R;H)$ в $L_2(R;H)$.

Доказательство. Поскольку $u(t) \in W_2^3(R;H)$, то применяя теорему о промежуточных производных [2], имеем

$$\|P_1 u\|_{L_2(R;H)} \leq \sum_{j=1}^3 \|A_j A^{-j}\|_{H \rightarrow H} \left\| A^j \frac{d^{3-j} u}{dt^{3-j}} \right\|_{L_2(R;H)} \leq \text{const} \|u\|_{W_2^3(R;H)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 1 показывает, что норма $\|P_0 u\|_{L_2(R;H)}$ эквивалентна в пространстве $W_2^3(R;H)$ исходной норме $\|u\|_{W_2^3(R;H)}$. Поэтому по теореме о промежуточных про-

изводных [2] конечны числа $n_j = \sup_{0 \neq u \in W_2^3(R;H)} \left\| A^j \frac{d^{3-j} u}{dt^{3-j}} \right\|_{L_2(R;H)} \|P_0 u\|_{L_2(R;H)}^{-1}$, $j = 1, 2, 3$.

Перейдем к оценке этих величин.

Теорема 3. $n_j \leq a_j$, $j = 1, 2, 3$, где $a_1 = a_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $a_3 = 1$.

Доказательство. Полагая $P_0 u(t) = f(t)$ и воспользовавшись преобразованием Фурье, получим

$$\begin{aligned} & \left\| A^j (i\xi)^{3-j} (i\xi E + A)^{-2} (-i\xi E + A)^{-1} \tilde{f}(\xi) \right\|_{L_2(R;H)} \leq \\ & \leq \sup_{\xi \in R} \left\| A^j (i\xi)^{3-j} (i\xi E + A)^{-2} (-i\xi E + A)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|\tilde{f}(\xi)\|_{L_2(R;H)}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, принимая во внимание спектральное разложение оператора A , оценим при $\xi \in R$ следующие нормы:

$$\begin{aligned} & \left\| A^j (i\xi)^{3-j} (i\xi E + A)^{-2} (-i\xi E + A)^{-1} \right\| = \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left| \mu^j (i\xi)^{3-j} (i\xi + \mu)^{-2} (-i\xi + \mu)^{-1} \right| \leq \\ & \leq \sup_{\substack{\tau = \frac{\xi^2}{\mu^2} \geq 0}} \frac{\tau^{\frac{3-j}{2}}}{(\tau + 1)^{\frac{3}{2}}} = a_j, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая (8) в (7), имеем

$$\left\| A^j (i\xi)^{3-j} (i\xi E + A)^{-2} (-i\xi E + A)^{-1} \tilde{f}(\xi) \right\|_{L_2(R;H)} \leq a_j \|\tilde{f}(\xi)\|_{L_2(R;H)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

которые эквивалентны, в свою очередь, неравенствам

$$\left\| A^j \frac{d^{3-j} u}{dt^{3-j}} \right\|_{L_2(R;H)} \leq a_j \|P_0 u\|_{L_2(R;H)}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Теорема доказана.

Проведенные исследования позволяют сформулировать основную теорему настоящей статьи, а именно, указать достаточные условия регулярной разрешимости уравнения (2).

Теорема 4. Пусть операторы $A_j A^{-j}$, $j = 1, 2, 3$, ограничены в H и выполняется неравенство $\sum_{j=1}^3 a_j \|A_j A^{-j}\|_{H \rightarrow H} < 1$, где a_j , $j = 1, 2, 3$, определяются в теореме 3. Тогда уравнение (2) регулярно разрешимо.

Доказательство. Ясно, что уравнение (2) можно написать в виде

$$P_0 u(t) + P_1 u(t) = f(t), \quad (9)$$

где $f(t) \in L_2(R;H)$, $u(t) \in W_2^3(R;H)$. У оператора P_0 , в силу теоремы 1, существует ограниченный обратный P_0^{-1} , который действует из $L_2(R;H)$ на $W_2^3(R;H)$. Тогда после замены $P_0 u(t) = v(t)$ уравнение (9) переписывается в виде

$$(E + P_1 P_0^{-1})v(t) = f(t).$$

Теперь покажем, что при выполнении условий теоремы норма $\|P_1 P_0^{-1}\|_{L_2(R;H) \rightarrow L_2(R;H)} < 1$. В силу теоремы 3 имеем

$$\begin{aligned} \|P_1 P_0^{-1} v\|_{L_2(R;H)} &= \|P_1 u\|_{L_2(R;H)} \leq \sum_{j=1}^3 \|A_j A^{-j}\|_{H \rightarrow H} \left\| A^j \frac{d^{3-j} u}{dt^{3-j}} \right\|_{L_2(R;H)} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^3 a_j \|A_j A^{-j}\|_{H \rightarrow H} \|P_0 u\|_{L_2(R;H)} = \sum_{j=1}^3 a_j \|A_j A^{-j}\|_{H \rightarrow H} \|v\|_{L_2(R;H)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|P_1 P_0^{-1}\|_{L_2(R;H) \rightarrow L_2(R;H)} \leq \sum_{j=1}^3 a_j \|A_j A^{-j}\|_{H \rightarrow H} < 1.$$

Таким образом, оператор $E + P_1 P_0^{-1}$ обратим в пространстве $L_2(R;H)$ и, значит, $u(t)$ можно определить формулой $u(t) = P_0^{-1} (E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f(t)$, причем

$$\|u\|_{W_2^3(R;H)} \leq \|P_0^{-1}\|_{L_2(R;H) \rightarrow W_2^3(R;H)} \left\| (E + P_1 P_0^{-1})^{-1} \right\|_{L_2(R;H) \rightarrow L_2(R;H)} \|f\|_{L_2(R;H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R;H)}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962, 829 с.
2. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
3. Мирзоев С.С. Вопросы теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними: Автореферат дис. ... докт. физ.-матем. наук. Баку, 1994, 32 с.
4. Favini A., Yakubov Y. Higher order ordinary differential-operator equations on the whole axis in UMD Banach spaces // Differential and Integral Equations, 2008, v. 21, № 5-6, p. 497-512.
5. Гумбаталиев Р.З. О разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка: Автореферат дис. ... канд. физ.-матем. наук. Баку, 2000, 16 с.
6. Gasymov A.A. On solvability of a class of complicated characteristic operator-differential equations of fourth order // Transactions of NAS of Azerb., ser. of phys.-tech. and math. sciences, 2008, v. 28, № 1, p. 49-54.
7. Мухамед А.С. Условия разрешимости для одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка // Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-матем. наук, 2010, № 4, с. 74-80.

BİR SINIF TƏKRARLANAN XARAKTERİSTİKAYA MALİK ÜÇTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

A.L.ELBABLİ

XÜLASƏ

Məqalədə bütün oxda bir sinif təkrarlanan xarakteristikaya malik üçtərtibli operator-diferensial tənliklərin həll olunma məsələsi öyrənilmişdir. $W_2^3(R; H)$ Sobolev tipli fəzada tədqiq olunan tənliyin korrekt və birqiymətli həll olunmasını təmin edən, yalnız onun operator əmsalları ilə ifadə olunan şərtlər müəyyən edilmişdir.

Açar sözlər: operator-diferensial tənlik, təkrarlanan xarakteristika, öz-özünə qoşma operator, Hilbert fəzası, requlyar həll olunma.

SOLVABILITY FOR A CLASS OF OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

A.L.ELBABLİ

SUMMARY

The article studies the solvability for a class of operator-differential equations of the third order with multiple characteristics on the whole axis. In the space $W_2^3(R; H)$ of Sobolev type, conditions that ensure the correct and unique solvability of the considered equation, which are expressed only by its operator coefficients are determined.

Key words: operator-differential equation, multiple characteristic, self-adjoint operator, Hilbert space, regular solvability.

Поступила в редакцию: 25.02.2011 г.

Принято к печати: 03.10.2011 г.